

I-Définition et propriétés :**1/ Définition :**

Une application du plan dans lui-même est une isométrie si elle conserve les distances.

C'est-à-dire pour tout points M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = MN$

* Point fixe :

Soit f une application du plan dans lui-même et I un point du plan, on dit que I est fixe par f (ou I est invariant par f). Si $f(I) = I$

* Les images de deux points distincts par une isométrie sont deux points distincts.

2/ Isométrie et produit scalaire :**Théorème :**

Une application du plan dans lui-même est une isométrie si et seulement si elle conserve le produit scalaire.

C'est-à-dire : pour trois points A, B et C d'images respectives A', B' et C'

$$\text{on a : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}$$

Conséquences :

(1) Soit f une isométrie du plan. A, B et C trois points distincts du plan d'images respectives A', B' et C' par f

on a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

On dit qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.

(2) Les images par une isométrie de trois points non alignés sont trois points non alignés.

Théorème :

Soit f une isométrie du plan A, B et C trois points non alignés du plan d'images respectives A', B' et C' par f.

—→ Si (A, \vec{AB}, \vec{AC}) est un repère orthonormé alors $(A', \vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ est un repère orthonormé.

—→ Si pour tout point M du plan d'image M' par f $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$, avec α et β des réels alors $\vec{A'M'} = \alpha \vec{A'B'} + \beta \vec{A'C'}$

Théorème :

Toutes isométrie f du plan est une bijection et sa réciproque est une isométrie notée : f^{-1}

Conséquences :

- Pour toute isométrie f et tout point M du plan $f(M) = N \Leftrightarrow f^{-1}(N) = M$
- Une symétrie orthogonale est une isométrie et sa réciproque est elle-même.
- Une symétrie centrale est une isométrie et sa réciproque est elle-même.
- Une translation de vecteur \vec{u} est une isométrie et sa réciproque est la translation de vecteur \vec{u} .
- Une rotation de centre I et d'angle α est une isométrie et sa réciproque est une rotation de centre I et d'angle $-\alpha$.

Théorème :

Soit f une isométrie et A, B, C et D quatre points d'images respectives A', B', C' et D' par f :

Si $\vec{AB} = \alpha \vec{CD}$ avec α un réel alors $\vec{A'B'} = \alpha \vec{C'D'}$

3/ Isométries et configurations :

- Une isométrie conserve le barycentre de deux points en particulier : une isométrie conserve le milieu d'un segment.
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment qui lui est isométrique.
- L'image par une isométrie
 - de deux droites parallèles sont deux droites parallèles (conservation du parallélisme)
 - deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires (conservation de l'orthogonalité)
 - d'un cercle est un cercle qui lui est isométrique
 - de la tangente à un cercle en un point M est la tangente au cercle image au point M' image de M (conservation du contact)

II- Composition d'isométries :

Théorème :

La composée de deux isométries est une isométrie.

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation. C'est -à-dire :

Si Δ et Δ' deux droites sécantes en un point I alors
$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r_{(I, 2(\vec{u}, \vec{u}'))} \\ \text{avec } \vec{u} \text{ directeur de } \Delta \text{ et } \vec{u}' \text{ directeur de } \Delta' \end{array} \right.$$

Remarque :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en I est une symétrie centrale de centre I.

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation. C'est -à-dire :

soit Δ et Δ' deux droites parallèles
$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \text{ normal à } \Delta \\ tu(\Delta) = \Delta' \end{array} \right.$$

Théorème :

Soient f et g deux isométries. $f \circ g = \text{Id}$ (ou Id est l'identité du plan) si et seulement si $g = f^{-1}$

Propriétés :

Soient f, g et h trois isométries

$$(1) (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(2) f = g \Leftrightarrow h \circ f = h \circ g$$

III- Isométries et points fixes :

Théorème :

Soit f une isométrie différente de l'identité, A un point non fixe par f d'image A'

Si M est fixe par f alors M est sur la médiatrice du segment [AA']

Théorème :

Une isométrie qui fixe trois points non alignés est l'identité du plan.

Conséquences :

Deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés sont identiques .

Donc une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Théorème :

Si f une isométrie fixe deux points distincts A et B

(1) Alors elle fixe tous les points de la droite (AB)

(2) Si de plus elle est différente de l'identité alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB)

Théorème :

Si f est une isométrie qui fixe un unique point I alors f est une rotation de centre I et d'angle non nul.

IV- Isométries sans points fixes :

Théorème :

Soit f une isométrie et O un point. f se décompose d'une manière unique en une translation et une isométrie g qui fixe O. Donc $f = t_{\vec{u}} \circ g$ avec $g(O) = O$ et $f(O) = O'$

Théorème :

Toute isométrie qui n'a aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul \vec{u} soit la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ et tel que \vec{u} est directeur de Δ .

Définition :

La composée d'une translation de vecteur non nul \vec{u} et une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que \vec{u} est directeur de Δ s'appelle une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur \vec{u} .
 Donc : si f est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur \vec{u} alors $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ c'est la forme réduite de f d'où $f \circ f = t_{2\vec{u}}$

V- Décomposition d'une isométrie :**Théorème :**

Toute isométrie se décompose en symétrie orthogonales.

(1) Les rotations

$$R_{(I, \theta)} = S_{D'} \circ S_D \text{ avec } \begin{cases} D \cap D' = \{ I \} \\ 2(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \theta [2\pi] \\ \vec{u} \text{ directeur de } D \\ \vec{u}' \text{ directeur de } D' \end{cases}$$

Remarque :

S_I : symétrie centrale de centre I .

$S_I = S_{D'} \circ S_D$ avec D et D' deux droites perpendiculaires en I .

(2) Les translations :

Soit \vec{u} un vecteur non nul. $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$ avec \vec{u} normal à D et $D' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$

Tableau récapitulatif

Nature de l'isométrie	Décomposition en symétrie orthogonales	Ensemble de points fixes
Id	$S_D \circ S_D$	Tout le plan
Symétrie orthogonale d'axe D	S_D	La droite D
Rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$S_{D'} \circ S_D$ ($D \cap D' = \{ I \}$)	$\{ I \}$
Translation de vecteur non nul	$S_{D'} \circ S_D$ ($D \cap D' = \emptyset$)	\emptyset
Symétrie glissante d'axe D et de vecteur \vec{u}	$S_{D''} \circ S_{D'} \circ S_D \begin{cases} D \cap D' = \emptyset \\ D \perp D'' \end{cases}$	\emptyset